

## **Skizzen zur numerischen Akustik**

Anlage zur Vorlesung Akustik für  
Ingenieure  
Prof. Josef Kolerus

Dieser Beitrag soll skizzenhaft in einige Verfahren der numerischen Akustik einführen. Ziel ist hier keineswegs die vollständige und exakte mathematische Ableitung. Es soll lediglich ein Schlußschluss zur bekannten mathematischen Theorie erreicht werden, speziell in Bezug auf

- Lösung partieller Differentialgleichungen
- Separationsansatz (Fouriertransformation)
- Eigenwertproblem
- Helmholtzgleichung/Helmholtzintegral

Vom klassischen Lösungsansatz sind analytische Lösungen nur für sehr einfache Strukturen wie Zylinder, Kugeln oder Halbräume möglich, was für die Praxis von sehr eingeschränktem Wert ist.

Bei verschiedenen Verfahren der numerischen Akustik werden äquivalente Lösungen auf messtechnischer Basis gewonnen, die Lösung bezieht sich dann nicht mehr auf eine vereinfachte Idealstruktur sondern auf das reale Objekt.

Die knappe Einführung an dieser Stelle hat lediglich das Ziel, den Leser Grundlagen zu liefern, Angebote von Firmen (Hersteller von Analysatoren) zu interpretieren und hinsichtlich der Anwendungsmöglichkeiten zu bewerten.

## Anwendungen

---

- Akustische Holografie (*NAH*)
- Spatial Transformation of Sound Field (*STSF*)
- Operational Modal Analysis (*OMA*)
- Musikalische Akustik
- Psychoakustik
  - Principal Component Analysis (*PCA*)
  - Independent Component Analysis (*ICA*)
- Statistik
  - *Faktorenanalyse*
  - *Projection Pursuit*
- Analyse von Transienten

Hier zunächst eine bloße Aufzählung von Verfahren, die sich mit einschlägiger Problematik befassen. Man kann sie weitgehend als fertige Produkte am Markt kaufen – als erprobte und bewährte Produkte. Hier werden keine esoterischen Phantasien vorgestellt.

Meist sind die Wurzeln der Verfahren nicht neu, sie reichen bis ins späte neunzehnte Jahrhundert zurück. So hat sich etwa Norbert Wiener eingehend mit Signalanalyse befasst. Die untersuchten Signale waren damals solche mit vergleichsweise niedriger Frequenz, da noch keine schnellen ADCs zur Verfügung standen: Die Gezeiten des Meeres, die Periodizität der Sonnenflecken. Immerhin, die bekannten Probleme, allgemein gerne als Artefakte bezeichnet (z. B. Leakage) sind auch damals schon aufgestoßen (*spurious frequencies*). Ein netter und interessanter Überblick ist in folgendem Buch zu finden:

S. Lawrence Marple, Jr: Digital Spectral Analysis with Application. Prentice Hall 1987

*NAH = Near Field Acoustic Holography*

## **Lösung der Wellengleichung**

Frequenzbereich  
(stationärer Fall)

Die Wellengleichung mit ihren Lösungsansätzen

- D'Alembertsche Lösung (Zeitbereich)
- Bernoullilösung (Frequenzbereich)

Soll hier aus vielen Bereichen als prinzipiell bekannt vorausgesetzt sein.

Den folgenden Betrachtungen ist die Bernoullilösung zugrunde gelegt.

## Lösung der Wellengleichung

---

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Fouriertransformation (Bernoullische Lösung)

$$\hat{p}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

⇒ Helmholtzgleichung (räumliche Verteilung)

$$\Delta \hat{p}(\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{p}(\omega) = 0$$

Bei der Bernoullischen Lösungsmethode wird klassisch ein Separationsansatz gewählt, bei dem die Lösung das Produkt einer Zeitfunktion und einer Ortsfunktion ist. Für die Zeitfunktion wird dann ein Exponentialansatz getroffen.

Gleichwertig, aber im gegebenen Zusammenhang transparenter ist eine Fouriertransformation der Dgl, die auf eine reine Ortsgleichung führt, die **Helmholtzgleichung**.

Für Dgln dieser Art bieten sich unter anderem zwei Lösungsmethoden an:

- ❖ Entwicklung nach Eigenfunktionen
- ❖ Lösung mit der Greenschen Funktion

Die Entwicklung nach Eigenfunktionen entsteht aus einem Randwertproblem für eine bestimmte Strukturberandung. Analytische Lösungen sind nur für sehr einfache Strukturen möglich, für akustische Probleme von eher eingeschränktem Wert.

Die Greensche Funktion ist ein Integralkern, über den die Lösung der Ortsfunktion im Raum außerhalb einer geschlossenen Oberfläche  $S$  aus der Feldgröße auf dieser Oberfläche berechnet wird.

## Lösung der Wellengleichung

---

### Helmholtzintegral

$$\hat{p}(x, y, z, \omega) = \frac{1}{4\pi} \cdot \oint_S \left( j\omega v_n(\omega) \frac{e^{-\frac{j\omega r}{c}}}{r} + \hat{p}(\omega) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-\frac{j\omega r}{c}}}{r} \right) dS$$

$$\frac{e^{-\frac{j\omega r}{c}}}{r} = \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (\text{freie}) \text{ Greensche Funktion}$$

Allgemeine Lösung mit Greenscher Funktion  $G(r, r')$

$$p(\underline{r}) = -\oint_S \left\{ j\omega \rho v_n(\underline{r}') G(\underline{r}, \underline{r}') + p(\underline{r}') \frac{\partial G(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n} \right\} dS(\underline{r}')$$

Die bekannteste Lösung der Helmholtzgleichung, das Helmholtzintegral, verwendet die so genannte freie Greensche Funktion. Die allgemeine Form enthält sowohl Feldgrößen wie auch Greensche Funktion in Stammform und Ableitung.

Man beachte, dass die Feldgröße  $p$  und  $v$  voneinander abhängig sind, der Zusammenhang ist über die strukturabhängige Impedanz gegeben. Die Greensche Funktion ist in diesem Ansatz ebenfalls unabhängig von der Struktur.

Man kann sich andererseits leicht überlegen: Prägt man am Rand der Struktur nur eine Feldgröße ein, so ist das Schallfeld vollständig bestimmt. Man denke etwa an ein Schall abstrahlendes Maschinengehäuse: Eingepreßt ist lediglich die Schnelle.

Schlussfolgerung: Das Helmholtzintegral ist überbestimmt. Es gibt noch andere Lösungsansätze!

## Rayleighintegral

$$p(\underline{r}) = -\oint_S \left\{ j\omega\rho u_n(\underline{r}') G(\underline{r}, \underline{r}') + p(\underline{r}') \frac{\partial G(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n} \right\} dS(\underline{r}') \\ \text{- Helmholtzintegral}$$

$$[G_p(\underline{r}, \underline{r}') ]_S \equiv 0 \Rightarrow$$

$$p(\underline{r}) = -\oint_S \left\{ p(\underline{r}') \frac{\partial G_p(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n} \right\} dS(\underline{r}') \\ \text{1. Rayleighintegral}$$

$$\left[ \frac{\partial G_u(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n} \right]_S = 0 \Rightarrow$$

$$p(\underline{r}) = -\oint_S \left\{ j\omega\rho u_n(\underline{r}') G_u(\underline{r}, \underline{r}') \right\} dS(\underline{r}') \\ \text{2. Rayleighintegral}$$

Principal Component Analysis

6

Wählt man eine Greensche Funktion, die an der Oberfläche  $S$  verschwindet, entfällt im Integral der Schnelleterm. Wählt man eine Greensche Funktion, deren Ableitung an der Oberfläche  $S$  verschwindet, entfällt im Integral der Druckterm. In beiden Fällen ist dann nur noch die Kenntnis *einer* an Stelle beider Feldgrößen auf der Oberfläche notwendig.

Die Greenschen Funktionen sind allerdings jetzt abhängig von der Struktur. Es gilt jetzt, geeignete Ansätze für eine Greensche Funktion zu finden. Für einfache Konfigurationen sind analytische Lösungen möglich. Für reale Strukturen ist auch eine experimentelle Lösung denkbar. Für beide Varianten gibt es in diesem Beitrag praktische Beispiele.

Die Integrale für die beiden Spezialfälle werden erstes und zweites Rayleighintegral genannt.

# **Akustische Holografie**

**Near Field Acoustic Holography**

***NAH***

Ziel der akustischen Holographie ist es, aus Schalldruck- Messungen über ein Mikrofon-Array das Schallfeld in anderen Raumgebieten zu berechnen.

Im Mikrofon-Array sind die Mikrofone in einer Ebene angeordnet. (Druckmessung) in einer ebenen Anordnung (Messebene), dem Hologramm, das Schallfeld in einer anderen Ebene des Raumes (Bildebene) zu berechnen.

*Der aufmerksame Leser denkt vielleicht jetzt schon an das  
1. Rayleighintegral*

## Akustische Holografie

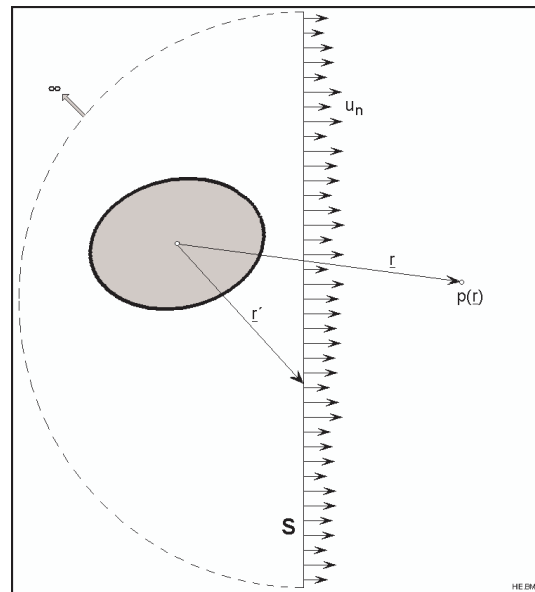
---

- Annahme eines kohärenten Schallfeldes
- Messung mit Mikrofonarray
- Approximation eines Halbraumes

Voraussetzung für die Holografie: Man hat nur eine einzige Sinusschallquelle, also eine einzige Komponente. Alle Messungen der einzelnen Mikrofone sind kohärent, die Kohärenzmatrix enthält nur Einsen.

Man misst mit einem ebenen Mikrofonarray das Schallfeld und bestimmt daraus die Ausbreitung in den Raum.

## Helmholtzintegral Halbraum

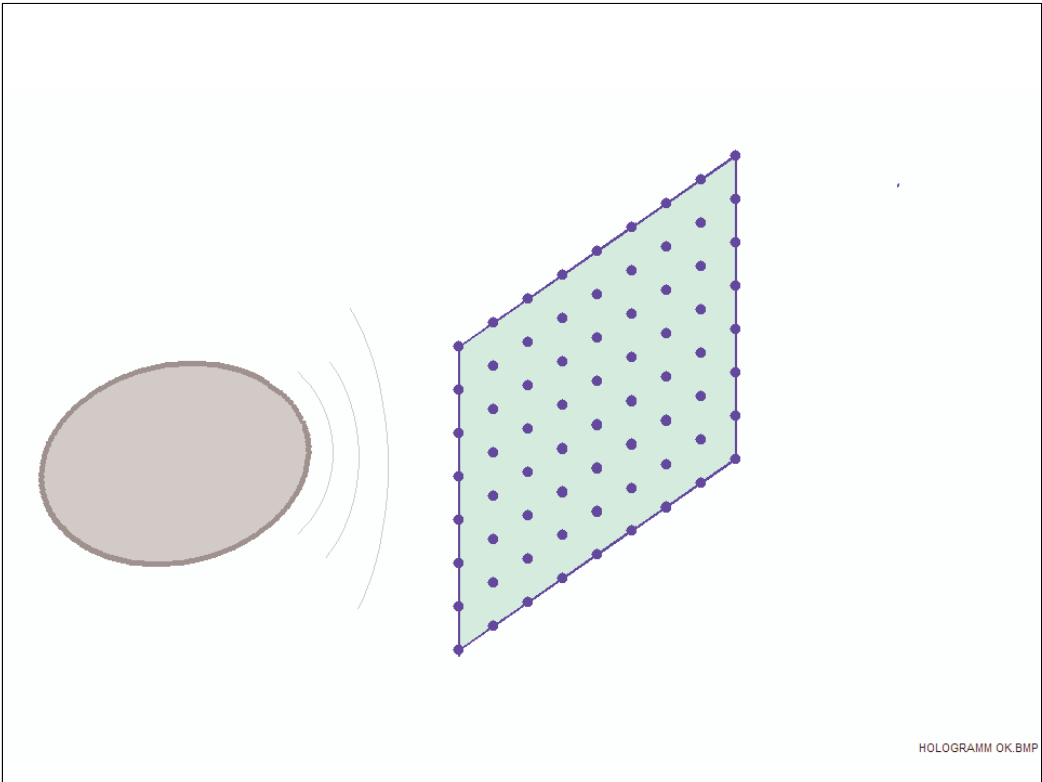


Principal Component Analysis

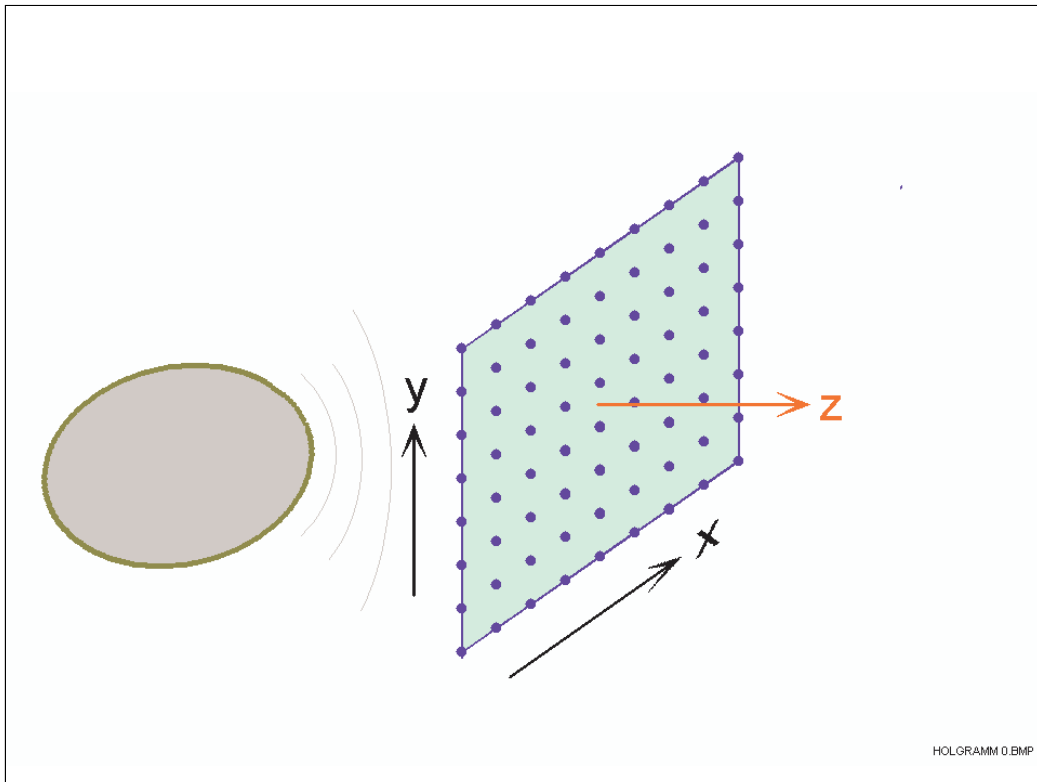
9

Grundgedanke: Lösung des Helmholtzintegrals bzw. des 1. Rayleighintegrals.

Geschlossene Hüllfläche, Halbkugel, deren Radius ins Unendliche geht. Die Anteile auf der Halbkugel liefern keinen Anteil (Sommerfeldsche Strahlungsbedingung). Die Halbebene wird durch ein Mikrofonarray approximiert.



Das Mikrofonarray: Anordnung von Mikrofonen in einem rechteckigen Raster in einer Ebene.



Ein kartesisches Koordinatensystem wird eingeführt.

## Lösung der Wellengleichung

---

Räumliches Schallfeld: Überlagerung von Wellen in verschiedenen Richtungen

Lösungsansatz:

$$p(x, y, z, t) = p_0 \left( e^{jk_x x} + e^{jk_y y} + e^{jk_z z} \right) e^{j\omega t} + \dots$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

Im dreidimensionalen Fall kann die Lösung der Wellengleichung immer als Überlagerung von ebenen Wellen in den Koordinatenrichtungen dargestellt werden. Für die Wellenzahlen in den Achsrichtungen gilt die Bedingung der quadratischen Summierung zur Wellenzahl.

## Lösung der Wellengleichung

---

- Messung in  $xy$ -Ebene
- Ausbreitungsrechnung in  $z$ -Richtung
- Fouriertransformation in  $xy$ -Richtung

$k_x, k_y$

$$k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}$$

Ausbreitung in  $z$ -Richtung

Im dreidimensionalen Fall kann die Lösung als Überlagerung von Wellen in den Koordinatenrichtungen dargestellt werden, z. B. kartesische Koordinaten  $x, y, z$ .

Die Wellenzahlen der Teilwellen hängen über quadratische Summation zusammen.  $k_x$  und  $k_y$  werden über die Druckverläufe im Array ( $xy$ -Ebene) gemessen,  $k_z$  daraus berechnet.

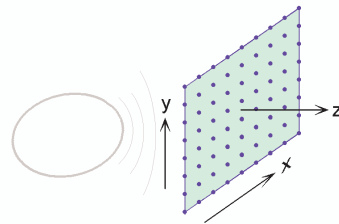
Die Messung der Wellenzahlen entspricht einer Fouriertransformation in  $x$ - und  $y$ -Richtung.

## Lösung der Wellengleichung

- Messung in  $xy$ -Ebene
- Ausbreitungsrechnung in  $z$ -Richtung
- Fouriertransformation in  $xy$ -Richtung

$$k_x, k_y$$
$$k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}$$

Ausbreitung in  $z$ -Richtung



Im dreidimensionalen Fall kann die Lösung als Überlagerung von Wellen in den Koordinatenrichtungen dargestellt werden, z. B. kartesische Koordinaten  $x, y, z$

## Lösung der Wellengleichung

### Gewöhnliche Dgl. - Exponentialansatz

$$\hat{p}(\omega, k_x, k_y, z) = \hat{p}_A(\omega, k_x, k_y) e^{\alpha z}$$

### Nichttriviale Lösung

$$\alpha^2 = k^2 - (k_x^2 + k_y^2)$$

$$\alpha = \pm \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}$$

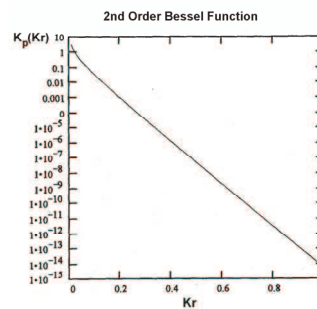
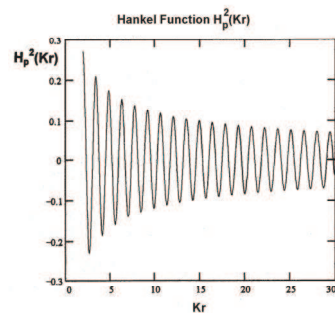
$$\hat{p}(\omega, k_x, k_y, z) = \hat{p}_+(k_x, k_y, \omega) e^{j\sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}z} + \hat{p}_-(k_x, k_y, \omega) e^{-j\sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}z}$$

Zusammenfassung der vorigen Ableitungen in einem Ansatz.

So sieht eine allgemeine Lösung für die Ausbreitung in z-Richtung aus. In x und y-Richtung wurde eine räumliche Fouriertransformation durchgeführt, in z nicht. Man kann sich vorstellen: Die Schalldruckverteilung am Mikrofonarray weist Periodizitäten in x und y-Richtung entsprechend den partiellen Wellenzahlen auf.

Man kann sich leicht überlegen: Die Lösung erfolgt auf Basis einer Schalldruckmessung über das 1. Rayleighintegral. Die Ausbreitungsfunktion in z-Richtung entspricht hier der gesuchten Greenschen Funktion.

## Fernfeld - Nahfeld



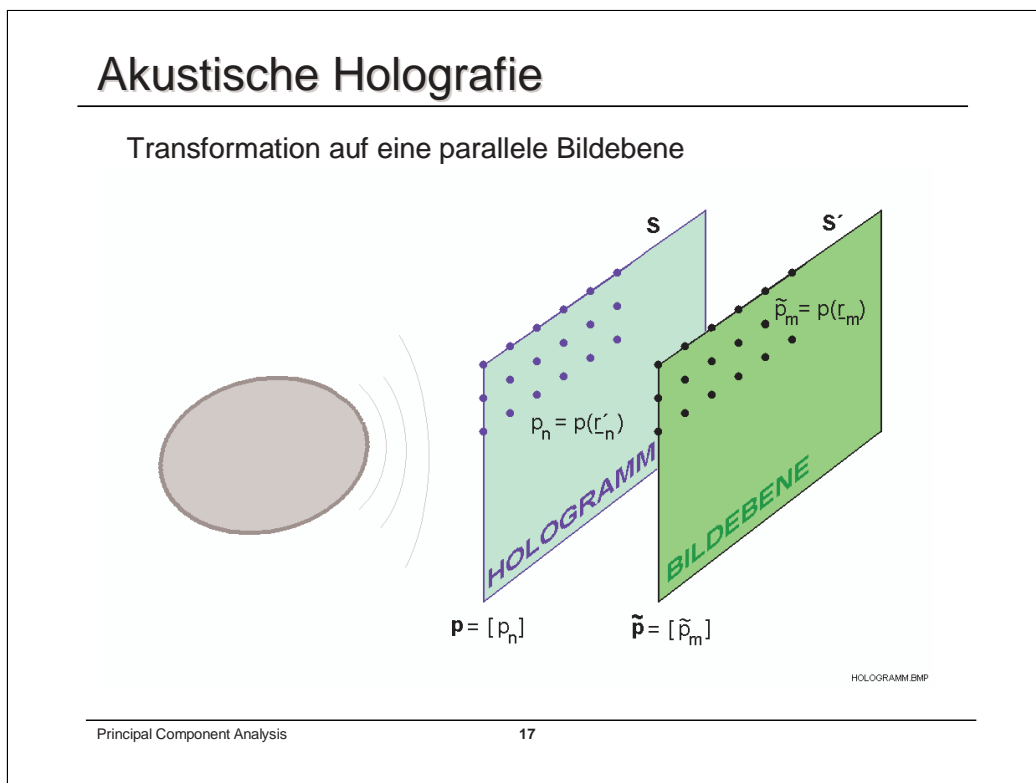
$k_z^2 > 0$  Fernfeldkomponente

$k_z^2 < 0$  Nahfeldkomponente  
(*evanescent wave*)

Je nach Lösung für die Wellenzahl  $k_z$  (Seite 14) erhält man Fernfeldkomponenten (trigonometrische Lösung), die eine Wellenausbreitung in z-Richtung beschreibt und Nahfeldkomponenten, die einen exponentiellen Druckabfall bedeuten. *Man beachte die unterschiedlichen Maßstäbe der x-Achse.*

Vorstellungsbeispiel: Man drückt dem Gegenüber mit dem Zeigefinger quasistatisch in die Backe (Delle - Nahfeld) oder man verpasst ihm eine schallende (!) Ohrfeige, dass die Backen zittern und es aus den Latschen kippt (Fernfeld).

In Fall der Fernfeldkomponente wird Energie abgestrahlt, Schallwellen werden abgestrahlt. Nahfeldkomponenten bewirken keine Schallabstrahlung ins Fernfeld.



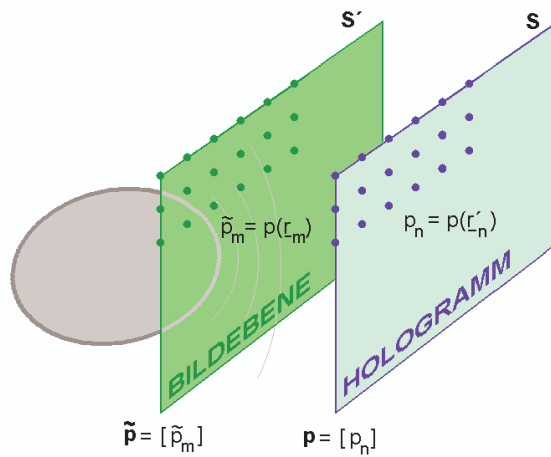
Man kann das Schallfeld in einer Parallelebene berechnen (auf einem parallel verschobenen Gitter), also etwa in dem Fenster, das durch das Array beschrieben wird.

Die (fouriertransformierte) Druckverteilung in der Messebene wird Hologramm genannt. Das in der Parallelebene daraus berechnete Feld entspricht dem rekonstruierten Bild in der optischen Holographie. Man spricht auch hier von der Bildebene.

Das Verfahren entspricht signaltheoretisch genau dem aus der Optik bekannten Verfahren der Holographie.

## Akustische Holografie

Transformation auf eine parallele Bildebene



NAH HOLOGRAMM EMP

Principal Component Analysis

18

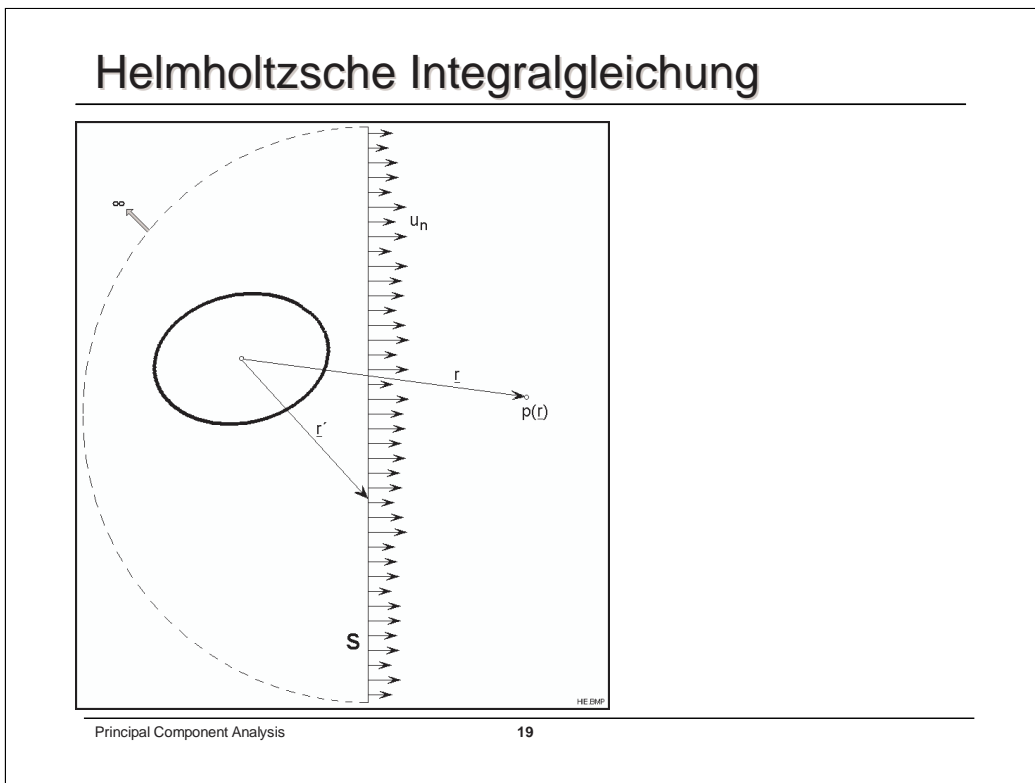
Funktioniert auch für eine Ebene in Richtung zum Objekt, bis direkt an die Oberfläche (aber immer nur im gleichen Medium). Jetzt werden auch die Nahfeldkomponenten mit erfasst (bzw. jetzt sind sie wesentlich). Wegen des starken Abfalls der Nahfeld-Komponenten muss man aber mit dem Array innerhalb der halben Wellenlänge liegen. Das Problem ist schlecht gestellt, da man aus kleinen Größen auf große hochrechnen muss.

Man vergleiche dazu die Diagramme Seite 16: Das Nahfeld (rechtes Diagramm) fällt extrem stark mit dem Abstand ab. Die Rückrechnung in der Holografie in Richtung von der Messebene zum Objekt erfolgt im Diagramm von rechts nach links. Ein kleiner Fehler in der Messebene (Hologramm), z. Rauschen, wird also stark hochgerechnet.

Schlechte Konditionierung dieser Art ist typisch für numerische Verfahren, die auf das strahlende Objekt rückrechnen. Im wesentlichen immer ein Kampf gegen das (unvermeidliche) Rauschen.

Die Rückrechnung auf die objektnahe Ebene gelingt wegen des starken Nahfeldabfalls nur, wenn die Hologrammebene (=Messebene) hinreichend nahe am Objekt liegt, also innerhalb einer halben Wellenlänge.

*Anmerkung: Jetzt sieht man, warum hier Fragen auftauchen, die verglichen mit der Optik neu sind: In der Optik wird man mit Aufnehmern einfach nie ins Nahfeld kommen.*



Unsere Technik (Mikrofonarray) beruht auf reiner Druckmessung ...

## 1. Rayleighintegral

---

$$p(\underline{r}) = -\oint_S \left\{ j\omega\rho u_n(\underline{r}') G(\underline{r}, \underline{r}') + p(\underline{r}') \frac{\partial G(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n} \right\} dS(\underline{r}')$$

$$[G_p(\underline{r}, \underline{r}')]_S = 0 \quad \text{1. Rayleighintegral}$$

$$\left[ \frac{\partial G_u(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n} \right]_S = 0 \quad \text{2. Rayleighintegral}$$

$$p(\underline{r}) = -\oint_S \left\{ p(\underline{r}') \frac{\partial G(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n} \right\} dS(\underline{r}')$$

... also dem 1. Rayleighintegral.

# **Räumliche Schallfeldtransformation**

**Spatial Transformation of Sound Fields**  
*STSF*

Für Fall des allgemeinen Schallfeldes.

## Spatial Transform of Sound Fields *STSF*

- Messung mit Mikrofonarray
- Zerlegung des Schallfeldes in inkohärente Komponenten
- Methoden der Holografie komponentenweise

Die Messtechnik bei der STSF ist gleich wie bei der Holographie. Es wird die Druckverteilung in einem ebenen Mikrofonarray gemessen. Die Beschränkung auf eine einzige monofrequente Komponente entfällt allerdings jetzt.

## Spatial Transform of Sound Fields *STSF*

---

- Messung mit Mikrofonarray
- Zerlegung des Schallfeldes in inkohärente Komponenten
  - Kovarianzmatrix
  - Kohärenzmatrix
  - Kreuzleistungsspektren
- Methoden der Holografie komponentenweise
- Basiert auf 1. Rayleighintegral

Das über das Mikrofonarray gemessene Schallfeld wird rechnerisch in unabhängige (unkorrelierte) Komponenten zerlegt. Für jede Komponente wird dann das zuvor skizzierte Verfahren der akustischen Holografie angewandt.

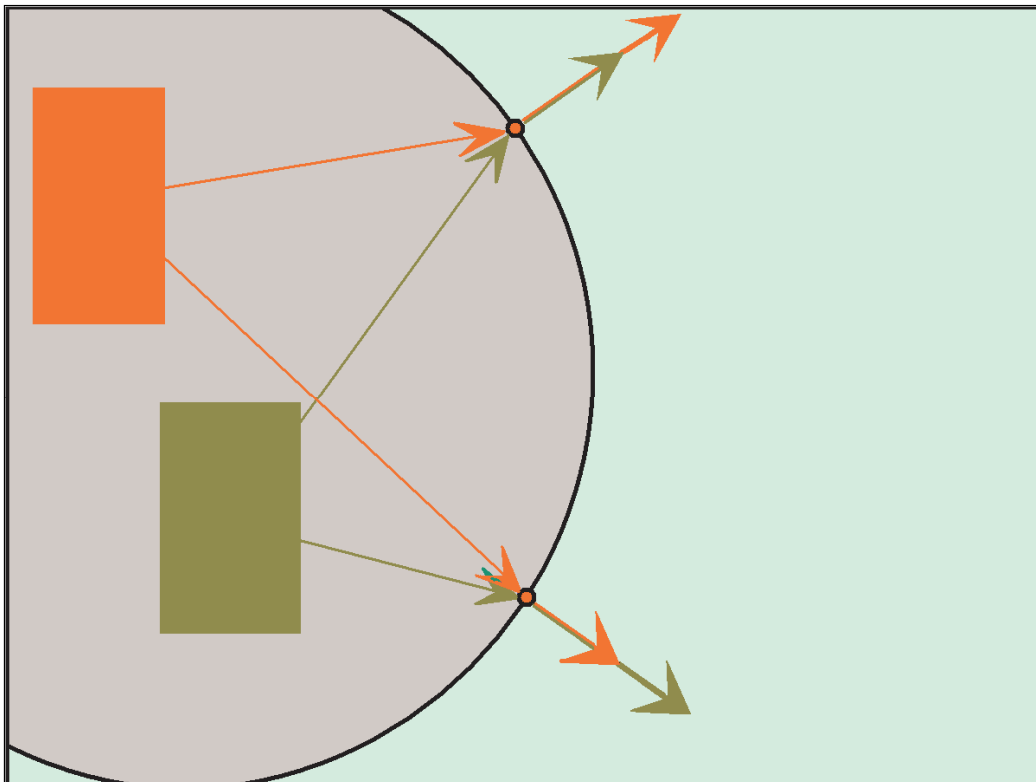
Zur Zerlegung in Komponenten werden die korrelativen Daten für die Messpunkte in einer Matrix angeordnet, die Zerlegung in Komponenten erfolgt auf Basis einer Eigenwertberechnung. Die Berechnung kann sowohl im Zeitbereich wie im Frequenzbereich erfolgen. Im Frequenzbereich (Kreuzleistungsspektren) hat man den Vorteil, dass man invariant gegen Laufzeitunterschiede ist, sofern diese geringer sind als die Blocklänge der FFT.

Im folgenden Abschnitt wird ein System zur Prognose der Wasserschallabstrahlung eines Schiffes vorgestellt, An Hand dieses Systems werden die Verfahren zur Komponententrennung etwas eingehender erläutert. Wie sie auch bei der STSF zur Anwendung kommen.

*Also bitte weiterlesen!*

## **Schallabstrahlung einer Struktur**

Ein praktisch durchgeführtes Projekt: Aus Schwingungsmessungen im Innenbereich eines Schiffes soll eine Prognose des ins Wasser abgestrahlten Schalls berechnet werden.



Das Bild visualisiert das Grundproblem: Maschinen im Inneren des Schiffes erzeugen Schwingungen, die zur Außenhaut übertragen und von dort ins Wasser abgestrahlt werden. Die Maschinen werden als unkorrelierte Schallquellen angenommen (*die Methodik für teilweise korrelierte Maschinen ist prinzipiell gleich, es sind allerdings aufwändigere Klassierungs- und Kalibrierverfahren notwendig, die das grundsätzliche Verfahren jedoch nicht tangieren; dieser Aspekt kommt daher nicht zur Sprache*).

Die Schwingungen an den verschiedenen Außenhautmesspunkten bestehen aus einer Überlagerung verschiedener Komponenten, sind also teilweise korreliert, teilweise unkorreliert. Ein einheitlicher Summationsalgorithmus kann nicht angegeben werden. Korrelierte Anteile (gleiche Quelle - gleiche Farbe) müssten phasenrein, unkorrelierte Anteile müssten energetisch summiert werden. Bei rein energetischer Rechnung (Abstrahlgrad) besteht sogar die Gefahr, dass die Prognose mit steigender Messpunktzahl an Genauigkeit verliert (*Grundgedanke: Bei nur einem Messpunkt entsteht grundsätzlich kein Summationsfehler!*).

Außerdem: Das Abstrahlverhalten der Komponenten ist stark unterschiedlich, nur wenige Komponenten strahlen wirklich ins Fernfeld ab. Die Nahfeldkomponenten (s. Holographie) strahlen nicht ab, dürfen also nicht berücksichtigt werden. Da sie außerdem praktisch keine Energie ins Wasser abgeben, also keiner Strahlungsdämpfung unterliegen, sind sie im Körperschall überrepräsentiert.

## Schallabstrahlung aus KS

---

- KS Messung an der Oberfläche
- Komponententrennung
- Abstrahlung komponentenweise
  - 2.Rayleighintegral
  - $G_u(r,r')$  experimentell

An der Außenhaut wird Körperschall gemessen, Messgröße ist die Schwinggeschwindigkeit. Das Verfahren basiert also auf dem 2.Rayleighintegral.

## Komponententrennung

---

### Selektion relevanter Komponenten

- Auswahl relevanter Quellen
- Messpunkte auf Quellen (Referenzpunkte)
- Messpunkte auf der Oberfläche

Schwingungen der Schiffshaut können auch von außen induziert werden (Seegang, externe Quellen). Für die Schallabstrahlung des Schiffes sind jedoch nur die aus dem Inneren induzierten Schwingungen maßgeblich.

Damit man wirklich nur Anteile erfasst, die von den Maschinen im Inneren kommen, legt man die akustisch relevanten Schallquellen (Maschinen) fest, montiert darauf zusätzliche Messpunkte (Referenzpunkte) und berücksichtigt nur Anteile, die damit korreliert sind.

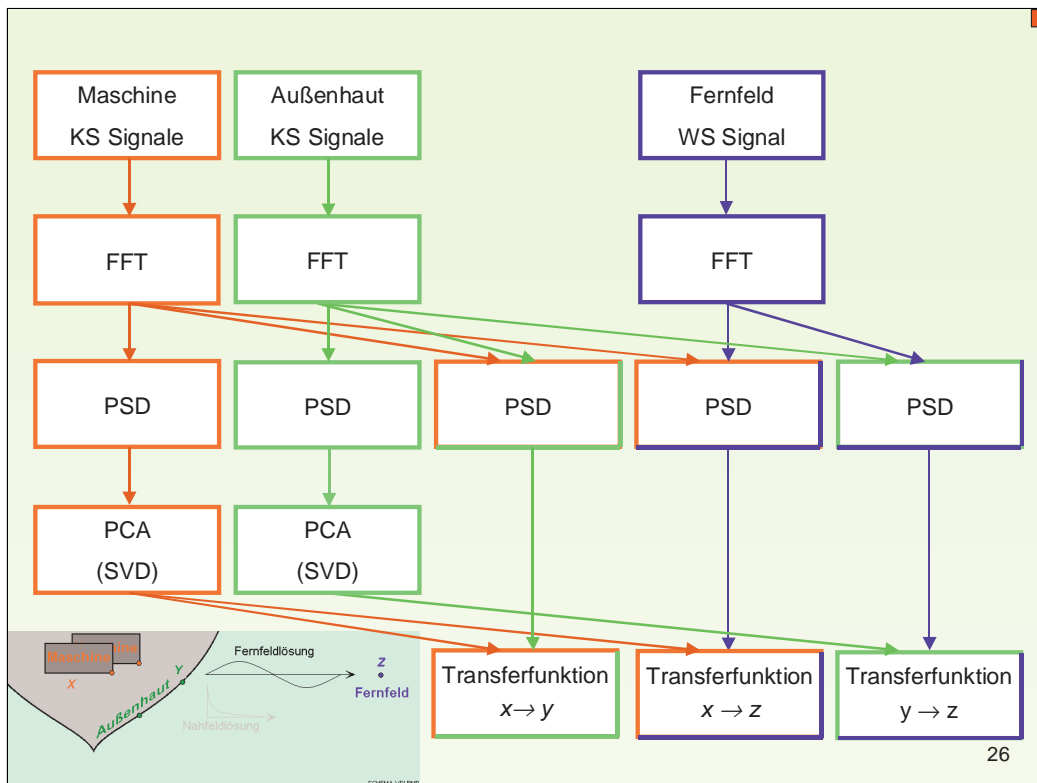
## Kalibrierung

---

### Strategie

- *PCA* der Referenzpunkte (Übersprechen)
- *PCA* der AH Punkte
- Korrelation AH – Referenz
  - Selektion relevanter AH Komponenten
  - Transferfunktion (el. Lagerung)
- Kalibrierung

Über die im folgenden erläuterte **Principal Component Analysis *PCA*** erfolgt die Trennung unkorrelierter Komponenten.



26

Roter Zweig („Maschine“): es erfolgt zunächst eine Komponententrennung der Referenzpunkte – der Messpunkte auf den Maschinen - um Übersprechen über die elastischen Maschinenlagerungen zu eliminieren. Die Komponenten (Quellenkomponenten) sind jetzt die reinen Maschinensignale.

Grüner Zweig („Außenhaut“): Simultan erfolgt eine Komponententrennung der Außenhautpunkte. Man erhält jetzt nicht nur die von den Maschinen an der Außenhaut erregten Komponenten sondern ggf. auch solche, die auf andere Quellen zurückzuführen sind.

Über die aus den Simultanmessungen abzuleitenden Übertragungsfunktionen Maschinen → Außenhaut kann aus den Quellenkomponenten eine Prognose der an der Außenhaut erregten Komponenten errechnet werden.

Über ein Ähnlichkeitsverfahren werden aus den Außenhautkomponenten diejenigen selektiert, die den Maschinen im Inneren zuzuordnen sind. Solche Ähnlichkeitsverfahren sind in der Modalanalyse gebräuchlich (Modal Assurance Criteria MAC).

Blauer Zweig („Fernfeld“): In einer Kalibrierung werden für einen Wasserschall-Messpunkt im Fernfeld nach dem gleichen Schema die Komponenten im Wasserschall identifiziert und den Maschinen im Schiff zugeordnet. Dort sind nur Fernfeldkomponenten auffindbar, die Nahfeldkomponenten sind in dieser Distanz bereits abgeklungen. An der Außenhaut sind jetzt diejenigen Komponenten identifiziert, die tatsächlich in Fernfeld abstrahlen (Fernfeldkomponenten).

Die Übertragungsfunktionen Außenhaut → Fernfeld (Greensche Funktion) können aus dem Kalibrierungsmessungen abgeleitet werden.

Im regulären Betriebsfall (rot/grün) werden die aktuellen Komponenten den bei der Kalibrierung ermittelten zugeordnet (MAC), aus den jetzt bekannten Übertragungsfunktionen wird die Wasserschallprognose berechnet.

***Was steckt hinter der PCA?***

## Blind Source Separation *BSS*

---

- Singular Value Decomposition *SVD*
- Faktorenanalyse
- Karhunen Loeve Entwicklung *KLE*
- Principal Component Analysis *PCA*
  
- Projection Pursuit (Strukturaufdeckung)
- Independent Component Analysis *ICA*

Die Principal Component Analysis *PCA* ist ein Überbegriff, ein Verfahren zur Trennung unkorrelierter Komponenten. Im Bild sind einige Begriffe aus diesem Sachgebiet aufgeführt (auch wenn sie zum Teil in diesem Beitrag nicht weiter angesprochen werden), einfach als Stichworte, etwa zur Recherche im Internet.

## Karhunen Loeve Entwicklung KLE

### Zerlegung in Komponenten

Physikalisch-mathematische Basis ist die Karhunen Loeve Entwicklung. Ausgangspunkt ist ein Ensemble nicht ergodischer stochastischer Prozesse.

Beispiel: Strömungsvorgänge in einem Fluid in einem abgeschlossenen Raum. Durch vielfache Versuche mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen erhält man ein Ensemble solcher Prozesse, der einzelne Prozess hängt stark, vielleicht sogar chaotisch von den Anfangsbedingungen ab.

Karhunen sucht einen Ansatz, um das gesamte Ensemble mit einem Minimalaufwand analytisch zu beschreiben.

Im konkreten Fall *Schallabstrahlung* sind die Prozesse die Signale an den Außenhautmesspunkten, als statistische Größe kann die Position der Schwingungsaufnehmer betrachtet werden.

*Anmerkung: Die Interpretation fester Größen als Repräsentanten eines stochastischen Prozesses ist in der Wahrscheinlichkeitslehre durchaus zulässig und üblich. Stellt man sich an Stelle einer festen Aufnehmersmontage einen Messtechniker vor, der mit seinem Messgerät die Runde macht und den Aufnehmer immer von Hand anhält, wird die Vorstellung erleichtert.*

## Karhunen Loeve Entwicklung

---

- **Messung**
  - Zustandsvektor  $\mathbf{u}(\theta)$
  
- **Ansatz**
  - Orthogonale Basisvektoren  $\mathbf{f}_i$
  - Entkorrelierte Zufallsgrößen  $\psi_i(\theta)$

$$\mathbf{u}(\theta) = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \psi_i(\theta)$$

$$\mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_j = \delta_{ij}, \quad E\{\psi_i(\theta) \psi_j(\theta)\} = \delta_{ij}$$

Der Prozess  $\mathbf{u}$  (Schwingungssignale) wird angesetzt als Produktsumme eines Systems orthogonaler Eigenvektoren  $\mathbf{f}_i$  mit entkoppelten Zufallsgrößen  $\psi_i(\theta)$ . Die Eigenvektoren sind auf die Länge Eins, die Zufallsgrößen auf die Varianz Eins normiert.

Die Entwicklung ist grob gesprochen eine Inversion des Bernoullischen Lösungsansatzes für die Wellengleichung (Separationsansatz: Produkt aus Ortsfunktion und Zeitfunktion).

*Anmerkung: Der eigenartige Koeffizient  $\sqrt{\lambda}$  ist ein heuristischer Ansatz: wie man später sehen wird, ist es der Zusammenhang zwischen Entwicklungskoeffizienten und Matrizeneigenwerten. Einfach weiter lesen!*

## Karhunen Loeve Entwicklung

---

Ansatz:

$$\mathbf{u}(\theta) = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \psi_i(\theta)$$

$$\mathbf{C}_u = E\{\mathbf{u}(\theta)\mathbf{u}^T(\theta)\} = E\left\{\sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \psi_i(\theta) \sum_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{f}_j^T \psi_j(\theta)\right\}$$

$$\mathbf{C}_u = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \sum_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{f}_j^T E\{\psi_i(\theta) \psi_j(\theta)\}$$

Ansatz als Reihenentwicklung.

Man kann die Größen der Reihenentwicklung bestimmen, indem man die Entwicklung in die Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_u$  der Elemente des Zufallsvektors einsetzt.

## Karhunen Loeve Entwicklung

---

Ansatz:

$$\mathbf{u}(\theta) = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \psi_i(\theta)$$

$$\mathbf{C}_u = E\{\mathbf{u}(\theta)\mathbf{u}^T(\theta)\} = E\left\{\sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \psi_i(\theta) \sum_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{f}_j^T \psi_j(\theta)\right\}$$

$$\mathbf{C}_u = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \sum_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{f}_j^T$$

Ansatz als Reihenentwicklung.

Einsetzen der Orthogonalitätsbedingungen für die Zeitfunktion ...

## Karhunen Loeve Entwicklung

---

Ansatz:

$$\mathbf{u}(\theta) = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \psi_i(\theta)$$

$$\mathbf{C}_u = \sum_i \lambda_i \mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T$$

$$\mathbf{C}_u \mathbf{f}_j = \sum_i \lambda_i \mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_j = \sum_j \lambda_j \mathbf{f}_j$$

$$\boxed{(\mathbf{C}_u - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{f}_j = 0}$$

... und für die Ortsfunktion führt das Problem in das Eigenwertproblem für die Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_u$  über.

Anmerkung: Man erkennt jetzt die Bedeutung des Koeffizienten beim Ansatz der Reihenentwicklung.

# **Singular Value Decomposition SVD**

Basis der KHE

Die Singular Value Decomposition ist ein Ansatz für die Lösung des Eigenwertproblems einer Matrix. Ableitungen findet man in Standardwerken der Matrizenrechnung (Zurmühl).

## Singular Value Decomposition SVD

$$\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$$

$$\mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_m] \in \mathbb{F}^{m \times m}$$

$$\mathbf{V} = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_p \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0,$$

$$p = \min\{m, n\}$$

Principal Component Analysis

38

Eine  $m \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$  lässt sich immer darstellen als Produkt von drei Matrizen:

- ❖ Die Matrix  $\mathbf{U}$  der Links-Eigenvektoren  $\mathbf{u}$
- ❖ Die Matrix  $\mathbf{\Sigma}$  der Eigenwerte (*singular values*)  $\sigma$
- ❖ Die Matrix  $\mathbf{V}$  der Rechts-Eigenvektoren  $\mathbf{v}$

Für reguläre Matrizen sind alle Eigenwerte positiv und der Größe nach sortiert.

## Singular Value Decomposition SVD

---

$\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 
 $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ u_{m1} & & & u_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{m1} \\ v_{12} & & & \\ \vdots & & & \\ v_{1n} & & & v_{nn} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{A}}$

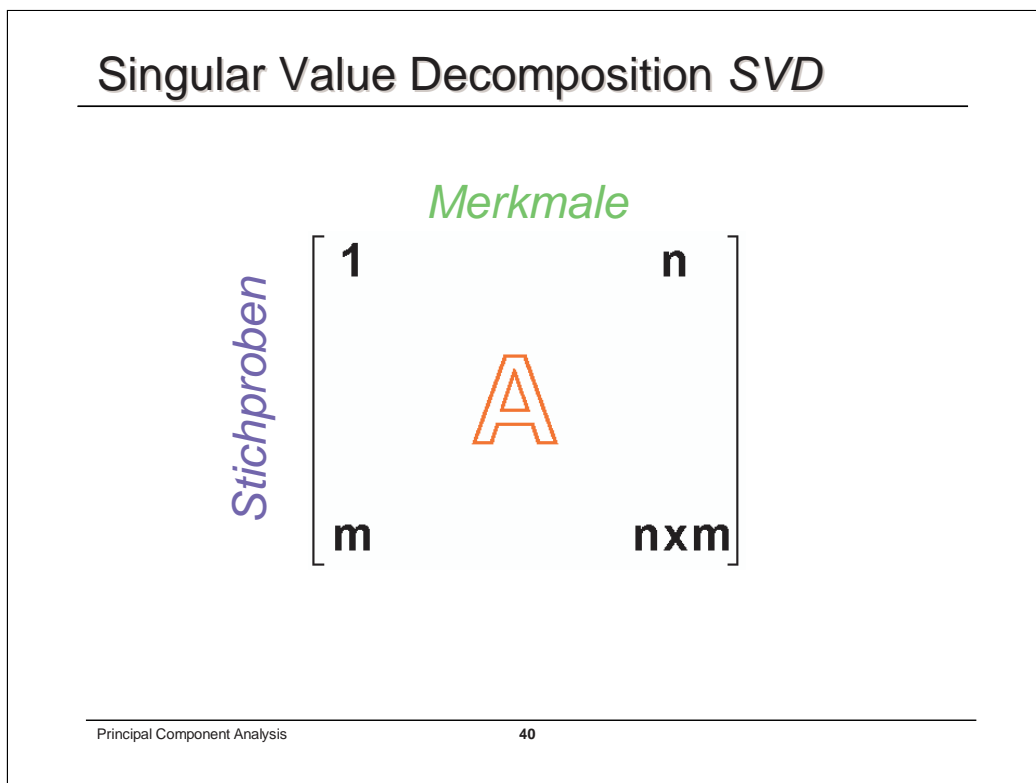
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{U}}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{V}^T}$

---

Principal Component Analysis
39

Mancher braucht das.



Beispiel Testreihe: In einem Testversuch werden von Testpersonen  $m$  Stichproben eines Testobjekts an Hand von  $n$  Merkmalen beurteilt.

Stichproben:  $m$  Geigen

$n$  Merkmale: Lautheit, Helligkeit, Schärfe, ...

Für jede Geige soll jedes der Merkmale in einer Skale von 1 bis 5 bewertet werden. Die Ergebnisse werden in eine Matrix **A** gepackt.

Horizontal die Merkmale (Versuchspersonen, A-Pegel, Lästigkeit, ...

Vertikal die Stichproben.

Die Ergebnisse sind meist unmittelbar nicht aussagekräftig. Typisch: Man erhält für jedes der Merkmale eine Beurteilung gut für 80% der Geigen – es sind aber nicht immer die gleichen 80%..

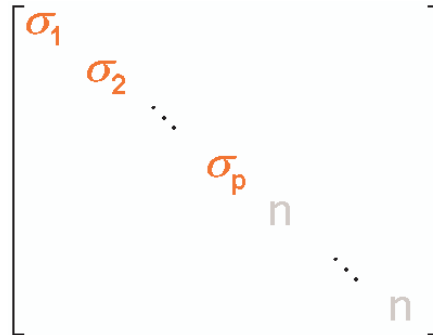
Warum? – Die gewählten Merkmale sind i.a. voneinander *abhängig*.





## Singular Value Decomposition SVD

$p$  unabhängige Merkmale - verrauscht



Principal Component Analysis

43

Rauschen macht sich in den kleinsten SV bemerkbar. I.a. wird man den Übergang durch einen deutlichen Abfall in der Eigenwertreihe erkennen; die restlichen Eigenwerte sind dann oft von sehr ähnlicher Größe. Die einfachste Methode, das System zu Entrauschen, ist das Nullsetzen der rauschdominierten Eigenwerte.

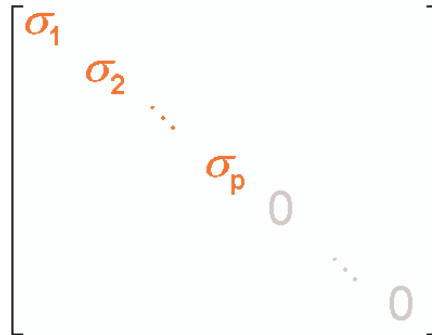
Anmerkung: Wendet man die SVD auf Messsignale an, wird man die Grenze durch Betrachten des Spektrums der Eigenfunktionen erkennen: Unterhalb der Rauschgrenze sind die Signale stochastisch, oberhalb weitgehend deterministisch (Maschinengeräusche).

Oder man hört sich die Komponenten im Kopfhörer an – dann merkt man schon, wenn sie lediglich rauschen.

## Singular Value Decomposition SVD

---

$p$  unabhängige Merkmale - entauschen

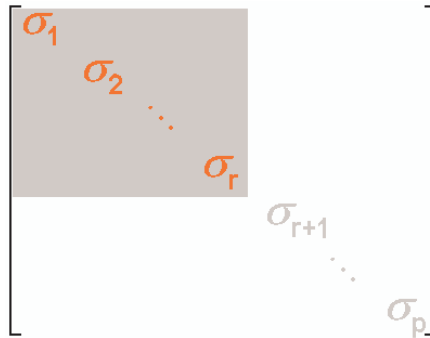




## Singular Value Decomposition SVD

---

Datenreduktion



## Singular Value Decomposition SVD

$$\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$$

$$\mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_m] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = [v_1, v_2, \dots, v_m] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mn} \end{bmatrix}$$

Die Linkseigenvektoren  $\mathbf{u}$  und die Rechtseigenvektoren  $\mathbf{v}$  sind Projektionen, einmal die Projektion eines Merkmals über die Stichproben, einmal die Projektion der Stichproben über die Merkmale. Aus den Eigenvektoren lässt sich die Grenze zum Rauschen ebenfalls bestimmen (wenn der Abfall der SV nicht ausreicht).

### Singular Value Decomposition SVD

---

$\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$        $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

---

Principal Component Analysis      48

Die Eigenvektoren sind unitär (orthogonal, spaltenorthogonal)

## Singular Value Decomposition SVD

---

$$\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{u}_i = \sigma_i^2\mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{u}_i = \sigma_i\mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i^2\mathbf{v}_i$$

Der Lösungsweg skizziert. Die Zusammenhänge links lassen sich leicht nachvollziehen. Durch Multiplikation erhält man rechts das klassische Eigenwertproblem, nur dass die Sigmaquadrat an der Stelle der üblichen Lambdas stehen.

## Singular Value Decomposition SVD

$$\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{u}_i = \sigma_i^2\mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{u}_i = \sigma_i\mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i^2\mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_p \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0,$$

$$p = \min\{m, n\}$$

## Singular Value Decomposition SVD

$$\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{u}_i = \sigma_i\mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_p} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0,$$

$$p = \min\{m, n\}$$

Geht man also auf die Lambdas über, findet man den Grund für die Wurzel im Ansatz der KHE.

## Singular Value Decomposition *SVD*

---

### Anwendungen

- KLE
- Datenkompression
- Bildverarbeitung

Die Karhunen Loeve Entwicklung basiert auf der SVD. Andere Anwendungen findet man in der Datenkompression bei Signalspeicherung in Bild- und Tonverarbeitung.

## **Zurück zur KLE**

Der Ansatz soll jetzt, mit mehr Kenntnissen, noch einmal wiederholt werden – erspart das zurück Blättern.

## Karhunen Loeve Entwicklung

---

Ansatz:

$$\mathbf{u}(\theta) = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \psi_i(\theta)$$

$$\mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_j = \delta_{ij}, \quad E\{\psi_i(\theta) \psi_j(\theta)\} = \delta_{ij}$$

Der Ansatz von Karhunen ist eine ganz allgemeine Formulierung. Er erläutert ihn am Beispiel einer Navier-Stokes Strömung in einem abgeschlossenen Raum. Man macht eine Anzahl von Experimenten. Die einzelne Strömung hängt von den Anfangsbedingungen ab, stark ab, vielleicht chaotisch. Trotzdem muss es Gemeinsamkeiten geben (Randbedingungen, Stoffparameter). Der Ansatz von K. hat eine möglichst kompakte Beschreibung des gesamten Ensembles zum Ziel.

Stochastischer Prozess, die Anfangsbedingung ist eine zusätzliche stochastische Größe (der Prozess selbst könnte sogar deterministisch sein). Das Ensemble der Prozesse ist nicht-ergodisch, d. h. die Scharmittelung lässt sich nicht durch zeitliche Mittelung einer einzigen Realisierung bestimmen.

Im konkreten Fall ist die stochastische Größe die Lage der Messpunkte. Das klingt zunächst befremdlich. Der zu Grunde liegende Prozess ist ein Messtechniker, der herum geht und die Aufnehmer freihändig anlegt. Hier wird nur eine einzige Realisierung dieses Prozesses angesetzt.

Diese Technik wird häufig bei bedingte Wahrscheinlichkeiten  $p(x|y)$  zur Berechnung angesetzt: Die eigentlich konstante Bedingung  $y$  wird als einzelne Realisierung eines hypothetischen stochastischen Prozesses interpretiert.

## Karhunen Loeve Entwicklung

---

Ansatz:

$$\mathbf{u}(\theta) = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \psi_i(\theta)$$

$$\mathbf{C}_u = E\{\mathbf{u}(\theta)\mathbf{u}^T(\theta)\} = E\left\{\sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \psi_i(\theta) \sum_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{f}_j^T \psi_j(\theta)\right\}$$

$$\mathbf{C}_u = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \sum_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{f}_j^T E\{\psi_i(\theta) \psi_j(\theta)\}$$

Ansatz als Reihenentwicklung.

Man kann die Größen der Reihenentwicklung bestimmen, indem man die Entwicklung in die Kovarianzmatrix der Elemente des Zufallsvektors einsetzt.

## Karhunen Loeve Entwicklung

---

Ansatz:

$$\mathbf{u}(\theta) = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \psi_i(\theta)$$

$$\mathbf{C}_u = E\{\mathbf{u}(\theta)\mathbf{u}^T(\theta)\} = E\left\{\sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \psi_i(\theta) \sum_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{f}_j^T \psi_j(\theta)\right\}$$

$$\mathbf{C}_u = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \sum_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{f}_j^T$$

Ansatz als Reihenentwicklung.

Man kann die Größen der Reihenentwicklung bestimmen, indem man die Entwicklung in die Kovarianzmatrix der Elemente des Zufallsvektors einsetzt. Man arbeitet jetzt auf die Lösung des Eigenwertproblems hin, wie bei der SVD skizziert, man bildet also die Kreuzmatrix.

## Karhunen Loeve Entwicklung

---

Ansatz:

$$\mathbf{u}(\theta) = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{f}_i \psi_i(\theta)$$

$$\mathbf{C}_u = \sum_i \lambda_i \mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T$$

$$\mathbf{C}_u \mathbf{f}_j = \sum_i \lambda_i \mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_j = \sum_j \lambda_j \mathbf{f}_j$$

$$\boxed{(\mathbf{C}_u - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{f}_j = 0}$$

Wegen der Orthogonalität ergibt sich eine Vereinfachung .

Über Gewichtung mit den Eigenvektoren wird das Problem in ein Eigenwertproblem überführt, für welches Algorithmen zur Verfügung stehen.

## Principal Component Analysis *PCA*

---

Quelle:

- Gemessene Größen  $\mathbf{u}_i(t)$

Ergebnis:

- Eigenwerte  $\lambda_i$  **Stärke**
- Eigenfunktionen  $\mathbf{f}_i(t)$  **Schwingform**

**Zielrichtungen**

- *Komponententrennung*
- *Entrauschen*
- *Datenreduktion*

Die Eigenwerte des KLE repräsentieren die Schwingstärke einer Komponente, die Eigenfunktionen die Schwingform.

Man geht also davon aus, dass die Schwingform durch die Eigenfunktion, die Stärke durch den Eigenwert beschrieben wird, dass sich also bei einer Erhöhung bzw. Änderung der Anregung die Schwingform *nicht* ändert sondern nur deren Amplituden. Ändert sich die Schwingform, muss man unterschiedliche Betriebszustände definieren, die dann auch individuell zu kalibrieren wären.

Auf Basis der KLE ist bei einer ausreichenden Anzahl von Schwingungsaufnehmern auch eine Betriebs-Modalanalyse durchführbar. Dabei ist die Zahl der Aufnehmer an der Struktur hinreichend groß zu wählen, so dass die Schwingform aus den Messpunkten rekonstruierbar ist.

Im Fall der Schallabstrahlung ist lediglich sicher zu stellen, dass die Komponenten immer einwandfrei richtig zuzuordnen sind, die Schwingform selbst ist dabei von untergeordneter Bedeutung (nur bei benachbarten, schwer trennbaren Komponenten).

## Principal Component Analysis *PCA*

---

- Die *PCA* ist eine Inversion des Eigenwertproblems
- Eigenfunktionen werden auf messtechnischer Basis identifiziert
- Beschränkung auf relevante Moden

Das wäre eine Begründung dafür, die numerische Akustik als eigenständige Disziplin zu klassieren und nicht als Erweiterung einer klassischen FE auf winzig kleine Elemente. Wegen der schlechten Konditionierung bzw. der hohen Modendichte ist der FE-Weg limitiert. Die klassische analytische Lösung geht den Weg DGL – Separationsansatz (Bernoulli) – Randwertproblem – Eigenfunktionen. Damit kommt man über Quader, Kugeln und Zylinder nicht hinaus. Das reicht vielleicht für die untersten Eigenfrequenzen einer Lagerung, nicht aber für die Akustik.

Der akustische Weg: Man bestimmt die Eigenfunktionen bzw. experimentell (Parameterschätzung) und setzt darauf eine analytische Behandlung auf. Man erhält damit die Eigenfunktionen wie sie sind und beschränkt sich auch auf die, die auftreten.

# **Betriebs-Modalanalyse**

Operational Modal Analysis  
*OMA*

## Operational Modal Analysis *OMA*

---

- Messung KS
- Messung der Strukturantwort
- Strukturerrregung (*nicht gemessen*)
  - Umweltgeräusch
  - Betriebsgeräusch
- Komponententrennung
  - Frequency Domain Decomposition (*FDD*)
  - Enhanced FDD (*EFDD*)
- *Komponente = Strukturmode*

Was es nicht alles gibt!

## 2. Rayleighintegral

---

$$p(\underline{r}) = -\oint_S \left\{ j\omega\rho u_n(\underline{r}') G(\underline{r}, \underline{r}') + p(\underline{r}') \frac{\partial G(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n} \right\} dS(\underline{r}')$$

$$[G_p(\underline{r}, \underline{r}')]_S = 0 \quad \text{1. Rayleighintegral}$$

$$\left[ \frac{\partial G_u(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n} \right]_S = 0 \quad \text{2. Rayleighintegral}$$

$$p(\underline{r}) = -\oint_S \{ j\omega\rho u_n(\underline{r}') G(\underline{r}, \underline{r}') \} dS(\underline{r}')$$

Die OMA beruht auf dem 2.RI

**ENDE**

Der Beitrag ist gedacht als Skizze zu Verfahren der numerischen Akustik zur Ergänzung der Vorlesung Akustik für Ingenieure. Es wird dabei kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben, so sind klassische Verfahren wie die Methode der finiten Elemente oder die Methode der Randelemente hier auch nicht ansatzweise behandelt. Das Paper soll lediglich einen Einblick geben in moderne Rechenverfahren, die auf Schallmessung und Signalanalyse basieren - für viele Verfahren in der technischen Akustik typisch. Ziel kann und soll es auf diesem Raum auch nicht sein, die Grundlagen für mathematische Entwicklungen oder für die Erstellung von Rechenprogrammen für solche Verfahren zu liefern. Der Studierende soll lediglich jetzt in der Lage sein, Angebote von Herstellern hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit und Brauchbarkeit im Vorfeld zu beurteilen, aber auch einen Einstieg in Literaturrecherchen oder Internetsuche zu finden.